Funciones de Lyapunov para algoritmos de modos deslizantes de segundo orden: Un enfoque disipativo

Marisol Osorio[1] y Jaime Moreno[2]

[1] Universidad Pontificia Bolivariana, Escuela de Ingeniería, Grupo de Investigación en Automática y Diseño, Cir 1 No. 70-01 B.11 Medellín, Colombia
marisol.osorio@upb.edu.co,
[2] Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Instituto de Ingeniería, Edificio 12, Circuito Exterior, 04510
México D.F.,México
JMorenoP@iingen.unam.mx

Resumen Este artículo presenta el análisis desde el punto de vista disipativo del algoritmo *Super Twisting*, una reconocida metodología para obtener modos deslizantes de segundo orden (MDSO) que se utiliza ampliamente en la literatura para el diseño de controladores, observadores y diferenciadores exactos. El análisis disipativo desemboca en la obtención de funciones fuertes de Lyapunov para el algoritmo *Super Twisting*, lo que no ha sido reportado hasta el momento en la literatura, y que comporta la posibilidad de disponer de muchas nuevas herramientas de análisis y diseño en el área de investigación en Modos Deslizantes de Orden Superior.

Key words: Modos Deslizantes, *Super Twisting*, Disipatividad, Análisis de Lyapunov

1 Introducción

Las estrategias de modos deslizantes para control y observación se utilizan ampliamente debido a su convergencia en tiempo finito y robustez ante perturbaciones. La teoría y la práctica del control por modos deslizantes ha sido profundamente estudiado [1,2,3,4,5,6,7,8]. La observación basada en algoritmos de modos deslizantes es un tópico de creciente interés [9,10,11,12,13]. Normalmente, los modos deslizantes se obtienen por inyección de un término discontinuo dependiente del error de la salida. Esta inyección se diseña tal que las trayectorias permanecen en una superficie en el espacio de error, en lo que se conoce como modo deslizante [8]. Este procedimiento permite el rechazo de algunas clases de perturbaciones e incertidumbres [12].

Levant [5,6] define el orden de los modos deslizantes por medio de un sistema dinámico suave con una función suave de salida σ, realimentado a través de un sistema dinámico que puede ser discontinuo, con la salida del lazo cerrado forzada a ser cero. Entonces, dado que las sucesivas derivadas con respecto al tiempo

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 297-306

$\sigma, \dot{\sigma}, \ldots, \sigma^{(r-1)}$ son funciones continuas de las variables de espacio de estado del sistema en lazo cerrado, y el conjunto $\sigma = \dot{\sigma} = \ldots = \sigma^{(r-1)} = 0$ es no vacío y consiste en trayectorias en el sentido de Filippov [14], se dice que el movimiento en el conjunto $\sigma = \dot{\sigma} = \ldots = \sigma^{(r-1)} = 0$ es un modo deslizante de . Se supone que la -ésima derivada $\sigma^{(r)}$ es discontinua o no existe.

El modo deslizante estándar es el de primer orden (i.e. $\dot{\sigma}$ es discontinuo) [5,6]. Se sabe que este modo deslizante es robusto y muy preciso con respecto a varias clases de perturbaciones internas y externas [7], pero está restringido al caso en que el grado relativo de la salida es 1, i.e., la inyección discontinua aparece ya en $\dot{\sigma}$. En este caso, el suicheo de alta frecuencia que presenta la salida en el modo deslizante puede ocasionar un efecto conocido como [2,7]. Los modos deslizantes de orden superior (HOSM, por sus siglas en inglés) aparecen en algunas ocasiones en sistemas con control por modos deslizantes tradicional, y en otras ocasiones son introducidos deliberadamente, dado que se ha encontrado que los HOSM convergentes en tiempo finito preservan las características de los modos deslizantes de primer orden y pueden mejorarlos, si se diseñan apropiadamente, en el sentido de eliminar el [5,6].

Para los modos deslizantes de primer orden es común usar funciones de Lyapunov para estudiar estabilidad, robustez y convergencia en tiempo finito [8,12,13]. Hasta ahora, no habían sido desarrollados tratamientos similares para HOSM. En vez de ello, es común utilizar métodos basados en homogeneidad o curvas límite de trayectoria para estudiar convergencia [3,10,11].

En [10,11] se propone una estrategia de observación en modos deslizantes de segundo orden (MDSO) basada en el algoritmo [3] . Allí, la convergencia en tiempo finito se comprueba mediante el uso de una curva límite de trayectorias, y se analiza la robustez de la estrategia frente a perturbaciones acotadas. Aquí se analiza de forma genérica un algoritmo similar, de manera que podría ser aplicado tanto a control como a observación. Se estudia el algoritmo desde el punto de vista disipativo, lo que permite obtener una función de Lyapunov. La convergencia en tiempo finito se asegura entonces mediante la función de Lyapunov hallada a partir del análisis de disipatividad. El uso de funciones de Lyapunov permite además la simplificación del método de diseño pues hace posible obtener funciones explícitas en términos de características conocidas del sistema y las perturbaciones.

En lo que sigue, se dan algunas bases sobre Sistemas Disipativos (Sección **2**) y se presenta el análisis disipativo de una estructura lineal básica (Sección **3**), como introducción al análisis disipativo del algoritmo en sí (Sección **4**). Por último, se dan algunas conclusiones al respecto.

2 Sistemas Disipativos

Considérese un sistema dinámico no lineal

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \tag{1}$$

con entradas $u \in \Re^m$, salidas $y \in \Re^p$ y estados $x \in \Re^n$.
Para el estudio de sus características disipativas, Σ_{NL} se define conjuntamente con una función $\omega(u(t), y(t))$, llamada *Tasa de Suministro*, tal que $\int_{t_1}^{t_0} |\omega(t)|\, dt < \infty$ para cualquier $(t_0, t_1) \in \Re_2^+$, i.e. ω es localmente integrable.

Definition 1. *[15] Un sistema dinámico Σ_{NL}, con tasa de suministro $\omega(u(t), y(t))$, es* Disipativo *si existe una función escalar no negativa $V(x)$, llamada* Función de Almacenamiento, *tal que para todo $(t_0, t_1) \in \Re_2^+$, x_0 y $x_1 \in \Re^n$, y $u \in \Re^m$,*

$$V(x_0) + \int_{t_1}^{t_0} \omega(t)\, dt \geq V(x_1). \tag{2}$$

x_0 son las condiciones iniciales del estado de Σ dadas en $t = t_0$ y x_1 es el estado alcanzado en el tiempo t_1, con condiciones iniciales x_0, ante una entrada u. La inecuación (2) se conoce como Desigualdad de Disipación. *Es interesante anotar que si $V(x)$ es diferenciable para todo $x \in \Re^n$ y $u \in \Re^m$, la desigualdad de disipación es equivalente a*

$$\dot{V}(x, u) \leq \omega(y, u). \tag{3}$$

Cuando la función de almacenamiento $V(x)$ asociada a un sistema disipativo tiene un mínimo local fuerte en un punto de equilibrio del sistema, entonces ese punto de equilibrio es estable.

Definition 2. *Un sistema lineal dinámico Σ_L*

$$\Sigma_L = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{4}$$

es Disipativo en los Estados *(DE) con respecto a una* tasa de alimentación $\omega(y, u)$ *si existe una* función de almacenamiento *positiva definida* $V(x) = x^T P x$, *de tal manera que a lo largo de cualquier trayectoria del sistema se satisface que*

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon x^T P x. \tag{5}$$

Si la función de tasa de alimentación se define

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}. \tag{6}$$

se dice que Σ_L es (Q, S, R)-DE.

En ese caso, la condición (5) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0, \tag{7}$$

con P simétrica y positiva definida, y $\epsilon > 0$ [16].
Para una clase de operadores estáticos definidos por medio de funciones multivaluadas:

Definition 3. *Una no linealidad sin memoria, multivaluada, variante en el tiempo* $\psi : [0, \infty) \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^m$,

$$y \in \psi(t, u) \ , \tag{8}$$

tal que $0 \in \psi(t, 0)$, *es* (Q, S, R)-Disipativa *((Q, S, R)-D), si para toda* $t \geq 0$, *y* $u \in \mathbf{R}^q$ *se cumple la desigualdad de disipatividad:*

$$\omega(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \geq 0. \tag{9}$$

Es de interés, para lo que sigue, considerar la relación entre la disipatividad y la estabilidad en sistemas interconectados que incluyen no linealidades multivaluadas, para lo que se establece el siguiente Lema.

Lemma 1. *Considere el sistema realimentado en la forma de Lur'e:*

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \ , \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx, \quad u \in -\psi(t, y) \, , \end{array} \tag{10}$$

y suponga que $\psi(t, y)$ *es una función vectorial multivaluada de dimensión* q *que se asume dependiente de* σ, *semicontinua por arriba, medible en el sentido de Lebesgue y localmente acotada. El conjunto al que pertenece la salida de* ψ *es no vacío, compacto y convexo. Si el sistema lineal* (C, A, B) *es* $(-R, S^T, -Q)$*-DE, y* ψ *es* (Q, S, R)*-D, entonces el punto de equilibrio* $x = 0$ *de (10) es Uniforme, Global y Exponencialmente Estable (UGEE).*

Prueba. La hipótesis sobre $\psi(t, y)$ asegura la existencia de soluciones para (10) [17]. Supóngase que (7) se satisface con $(-R, S^T, -Q)$. Sea $V(x) = x^T P x$ una candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias solución de (10) es $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P(Ax + Bu)$, lo que también se puede escribir, con (7) y la última ecuación en (10):

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R C & C^T S^T \\ SC & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x.$$

Como $u \in -\psi$ y $y = Cx$, lo anterior se puede escribir:

$$\dot{V} \leq -\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} - \epsilon V(x)$$

de lo que se sigue que

$$\dot{V} \leq -\epsilon V(x) \tag{11}$$

dado que ψ es (Q, S, R)-D. De la teoría de estabilidad de Lyapunov se puede concluir que el origen de (10) es Universal, Global y Asintóticamente Estable. Para probar que la estabilidad del sistema es además exponencial, se recuerda que $V(x)$ es una función positiva definida cuadrática $x^T P x$ que satisface siempre que $\lambda_{min}(P)x^Tx \leq V(t,x) \leq \lambda_{max}(P)x^Tx$. Con esto y (11), utilizando el conocido Lema de Comparación [18] se puede concluir que $\|x\| \leq \left(\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\right)\|x(t_0)\| e^{-(\epsilon/2)(t-t_0)}$ y que, por ende, el origen de (10) es UGEE. ∎

El Lema 1 es una generalización del teorema del círculo para sistemas multivaluados y establece las condiciones que permiten determinar su estabilidad, con base en condiciones de disipatividad, cuando los sistemas se pueden expresar en la forma de Lur'e. Dado que el sistema incluye no linealidades multivaluadas, es posible que la inclusión diferencial que lo representa tenga múltiples soluciones, en cuyo caso el Lema 1 implica que todas tienden al origen y $V(x) = X^TPx$ es una función de Lyapunov .

3 Análisis Disipativo de una Estructura Lineal Básica

Un reconocido algoritmo para control y observación que usa Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO) es el llamado [7]

$$\Xi : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 |x_1|^{1/2} \operatorname{sign}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x,t) \\ \dot{x}_2 = -k_3 \operatorname{sign}(x_1) + \varrho_2(x,t) \end{cases} \tag{12}$$

donde x_i son variables de estado escalares, k_i son ganancias a ser diseñadas y ϱ_i son términos de perturbación. Las soluciones de la inclusión diferencial son trayectorias en el sentido de Filippov [14]. Obsérvese que, a pesar de que sus propiedades son muy diferentes, el algoritmo puede ser visto como una versión no lineal del siguiente algoritmo lineal básico:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_2 x_1 + x_2 + \varrho_1(x,t) \\ \dot{x}_2 = -k_4 x_1 + \varrho_2(x,t) \ , \end{cases} \tag{13}$$

Es posible estudiar este algoritmo desde el punto de vista disipativo y corroborar que es robusto ante perturbaciones acotadas de la forma

$$\begin{aligned} |\varrho_1| &\leq \delta_3 |x_1| \ , \\ |\varrho_2| &\leq \delta_4 |x_1| \ , \end{aligned} \tag{14}$$

para constantes $\delta_3, \delta_4 > 0$. Obsérvese que (13) es un sistema en la forma de Lur'e que tiene en la realimentación un bloque no lineal ψ sin memoria, cuya entrada es x_1 y cuyas salidas son ϱ_1 y ϱ_2: $\psi(x_1) = \begin{bmatrix}\varrho_1 & \varrho_2\end{bmatrix}^T$. Definiendo $\omega_1 = x_1^2 - \frac{\varrho_1^2}{\delta_3^2}$ y $\omega_2 = x_1^2 - \frac{\varrho_2^2}{\delta_4^2}$, de (14) es posible concluir que

$$W_2(\psi, x_1) = \omega_1 + \omega_2 = \begin{bmatrix} \psi \\ x_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ x_1 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{15}$$

W_2 es una función de alimentación con respecto a la cual ψ es disipativo, o de otra forma, ψ es (Q,S,R)-D con $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_3^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_4^2} \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $R = 2$. Para cumplir el Lema 1 es necesario encontrar $V(x) = x^T P x$, k_2 y k_4 tal que el sistema lineal de lazo abierto con entradas u_1 y u_2

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_2 x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -k_4 x_1 + u_2 \\ y = x_1 \,, \end{cases} \tag{16}$$

sea $(-R, S^T, -Q)$-DE, esto es, que

$$W_1(x,u) - \dot{V}(x,u) \geq \epsilon x^T P x \tag{17}$$

para algún $\epsilon > 0$ con

$$\dot{V}(x,u) = x^T \left(P \begin{bmatrix} -k_2 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}^T P \right) x + 2u^T P x \tag{18}$$

$$W_1(y,u) = W_1(x_1,u) = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_4^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} . \tag{19}$$

Una posible elección de P, k_2 y k_4 para que (17) se cumpla es:

$$P = \begin{bmatrix} 3\frac{\delta_4}{\delta_3^3} & -\frac{1}{2\delta_3^2} \\ -\frac{1}{2\delta_3^2} & \frac{\sqrt{3}-1}{4\delta_3\delta_4} \end{bmatrix},$$
$$k_2 = \left[\frac{\delta_3^2 + 16\delta_3^4 + 82\delta_4^2}{8\delta_3^2} + \frac{(11-\sqrt{3})\delta_4^2}{2(\sqrt{3}-1)\delta_3^2} \right] \frac{\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}-10} \;\; \text{y} \;\; k_4 = \frac{4\delta_4 k_2}{(\sqrt{3}-1)\delta_3} + \frac{(11-\sqrt{3})\delta_4^2}{2(\sqrt{3}-1)\delta_3^2}. \tag{20}$$

De esta forma, analizando la disipatividad de (13), se ha obtenido una función de Lyapunov para Σ, y además, del Lema 1 es posible concluir que el origen de Σ es UGEE.

4 Análisis Disipativo del Algoritmo *Super Twisting*

Defínase $\zeta^T = \left[|x_1|^{1/2} \operatorname{Signo}(x_1) \;,\; x_2 \right]$. De esta forma, (12) puede escribirse

$$\Xi \; : \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{1}{2|x_1|^{1/2}} \left(-k_1 x_1^{1/2} \operatorname{Signo}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x) \right) \\ \dot{\zeta}_2 = -k_3 \operatorname{Signo}(x_1) + \varrho_2(x) \end{cases}$$
$$= \frac{1}{|\zeta_1|} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{2}\zeta_1 + \frac{\zeta_2}{2} \\ -k_3\zeta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{2} \\ \varrho_2 |\zeta_1| \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{|\zeta_1|} \{ A\zeta + B\bar{\varrho} \} \tag{21}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_3 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; \text{y} \; \bar{\varrho} = \begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{2} \\ \varrho_2 |\zeta_1| \end{bmatrix} \tag{22}$$

Escrito así, se hace evidente la semejanza estructural entre (12) y (13). De esta forma, el análisis desde el punto de vista disipativo de (12) puede hacerse de manera similar a como se hizo para (13).
Es posible entonces definir un sistema Ξ_L dado por $A\zeta + B\bar{\varrho}$. Este es un sistema en la forma de Lur'e cuya realimentación consiste en el bloque no lineal sin memoria con entrada ζ_1 y salida $\bar{\varrho}$. Supóngase que los términos de perturbación en (12) están dados por $|\varrho_1| \leq \delta_1 |x_1|^{1/2}$ y $|\varrho_2| \leq \delta_2$, lo que equivale a

$$2|\bar{\varrho}_1| \leq \delta_1 |\zeta_1| \ , \ \bar{\varrho}_2 \leq \delta_2 |\zeta_1| \ , \tag{23}$$

Definiendo $\omega_1 = \zeta_1^2 - \frac{\bar{\varrho}_1^2}{\delta_1^2}$ y $\omega_2 \doteq \zeta_1^2 - \frac{\bar{\varrho}_2^2}{\delta_2^2}$, de (23) es posible concluir que

$$W_2(\bar{\varrho}, \zeta_1) = \omega_1 + \omega_2 = \begin{bmatrix} \bar{\varrho} \\ \zeta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varrho} \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{24}$$

W_2 es una función de alimentación con respecto a la cual $\bar{\varrho}$ es disipativo, o de otra forma, $\bar{\varrho}$ es (Q, S, R)-D con $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_2^2} \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $R = 2$. Se busca entonces $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$, k_1 y k_3 tal que el sistema lineal de lazo abierto con entradas u_1 y u_2

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -\frac{k_1}{2}\zeta_1 + \frac{\zeta_2}{2} + u_1, \quad \dot{\zeta}_2 = -k_3\zeta_1 + u_2 \\ y = \zeta_1 \end{cases} \tag{25}$$

sea $(-R, S^T, -Q)$-DE, esto es, que

$$W_1(\zeta, u) - \dot{V}_L(\zeta, u) \geq \epsilon \zeta^T P \zeta \tag{26}$$

para algún $\epsilon > 0$, con $\dot{V}_L$ la derivada de V en las trayectorias de Ξ_L

$$\dot{V}_L(\zeta, u) = \zeta^T \left(PA + A^T P\right) \zeta + 2u^T P \zeta \tag{27}$$

y

$$W_1(y, u) = W_1(\zeta_1, u) = \begin{bmatrix} \zeta \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ u \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Una posible elección de P, k_1 y k_3 para que (26) se cumpla es:

$$P = \begin{bmatrix} 3\frac{\delta_2}{\delta_1^3} & -\frac{1}{4\delta_1^2} \\ -\frac{1}{4\delta_1^2} & \frac{\sqrt{2}-1}{4\delta_1\delta_2} \end{bmatrix}, \ k_1 = \left[\frac{2\delta_1^3}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1}\left(\frac{167\sqrt{2}-147}{16\sqrt{2}-16}\right) + \frac{\delta_1}{8\delta_2}\right]\left(\frac{12\sqrt{2}-13}{4\sqrt{2}-4}\right) \text{ y}$$

$$k_3 = \frac{\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\left(32\delta_1^2+2\right)+\delta_2^2\left(171\sqrt{2}-147\right)\right]\left(12\sqrt{2}-13\right)+32\delta_2^2\left(11-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{128\delta_1^2\left(\sqrt{2}-1\right)^3}. \tag{29}$$

Si se divide (26) entre $|\zeta_1|$, la desigualdad no se altera. Obsérvese que $\dot{V}(\zeta,u) = \frac{\dot{V}_L}{|\zeta_1|}$ es precisamente la derivada de la función de Lyapunov propuesta, pero hallada en las trayectorias del sistema no lineal Ξ. Con ello, $W(\zeta,u) = \frac{W_L}{|\zeta_1|}$ es una función de alimentación con respecto a la cual Ξ es disipativo, y por ende, estable.

Nota 1 *Después de algún trabajo algebraico, es posible escribir en términos de los estados originales x_1 y x_2 a $V(x)$, lo que pone de manifiesto que es continua pero no diferenciable:*

$$V(x) = \frac{1}{4\delta_1^2}\left[|x_1|\left(\frac{12\delta_1}{\delta_1} - 1\right) + x_2^2\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1}\right) + (|x_1|\,\text{Signo}(x_1) - x_2)^2\right], \tag{30}$$

con lo que se requiere para su tratamiento alguna versión no suave de la teoría de Lyapunov (Véase [19] o el artículo tutorial reciente [20]). Nótese que la versión usual para funciones de Lyapunov lipschitzianas [14,17,21] no es de utilidad aquí porque $V(x)$ no es localmente Lipschitz. Por ende, no se debería usar el Gradiente Generalizado de $V(x)$ sino su Subdiferencial Proximal [19]. En este caso, sin embargo, es posible usar un método más simple debido a que las trayectorias de estado $\varphi(t,x_0)$ de la inclusión diferencial (12) son funciones absolutamente continuas y por ende $V(\varphi(t,x_0))$ es una función continua del tiempo. Debido a la no lipschitcidad de $V(x)$, no es posible asegurar la continuidad absoluta de $V(\varphi(t,x_0))$, ni su diferenciabilidad. Sin embargo, $V(x)$ es continuamente diferenciable, excepto en el conjunto $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$. Sin embargo, las trayectorias del sistema (12) cruzan la superficie de S y no pueden permanecer en ese conjunto, excepto cuando alcanzan el origen $x = 0$. Esto significa que $V(\varphi(t,x_0))$ es diferenciable para casi todo t, y en los valores en que es diferenciable, la derivada puede ser calculada en la forma usual, aplicando la regla de la cadena. O sea que es posible aplicar el teorema de Lyapunov considerando solamente los puntos en que $V(x)$ es diferenciable.

Nótese adicionalmente, de (26) y el Lema 1, que $\dot{V}(\zeta,u) \leq -\frac{\epsilon V(\zeta)}{|\zeta_1|}$. Como $\zeta_1 = |x_1|^{1/2}\,\text{Signo}(x_1)$, $\dot{V} \leq -\frac{\epsilon V}{|x_1|^{1/2}}$. Como $V = \zeta^T P \zeta$, se puede afirmar que es acotada: $\lambda_{\text{mín}}\{P\}\|\zeta\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\text{máx}}\{P\}\|\zeta\|_2^2$, con $\|\zeta\|_2^2 = |x_1| + x_2^2$ la norma Euclideana de ζ. Dado que $|x_1|^{1/2} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{\text{mín}}^{1/2}\{P\}}$ se concluye que $\dot{V} \leq -\gamma V^{1/2}$, donde $\gamma = \epsilon\lambda_{\text{mín}}^{1/2}\{P\}$. Ya que la solución de la ecuación diferencial $\dot{v} = -\gamma v^{1/2}$ con condiciones iniciales $v(0) = v_0 \geq 0$ está dada por

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} - \frac{\gamma}{2}t\right)^2 \tag{31}$$

resulta, del principio de comparación [18], que $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(\zeta_0) \leq v_0$. De (31) se obtiene que $V(\zeta(t))$, $\zeta(t)$, y por ende $x(t)$, convergen a cero en tiempo finito y alcanza ese valor a lo sumo después de $T = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\gamma}$ unidades de

tiempo.
En este punto, es interesante analizar las dos estructuras que se han estudiado: Un algoritmo lineal y uno no lineal MDSO *Super Twisting*. Es posible observar dos diferencias notables entre ellos. Primero, sus propiedades de convergencia son diferentes. Mientras que el sistema lineal converge *exponencialmente*, las trayectorias del algoritmo MDSO *Super Twisting* convergen en *tiempo finito*. Esto es debido a que el algoritmo MDSO no es localmente Lipschitz en el origen, lo que significa que su comportamiento alrededor del origen es muy fuerte, en comparación con el caso lineal. Por otro lado, los términos de corrección lineal son más fuertes de los del algoritmo MDSO lejos del origen. Estas diferencias causan un contraste adicional: Las perturbaciones que cada algoritmo es capaz de manejar son diferentes. Las que el sistema lineal puede soportar crecen linealmente, son mas fuertes lejos del origen que cerca de él, mientras que lo contrario ocurre con el *Super Twisting*. En ese sentido, se trata de dos herramientas con utilidades diferentes que podrían ser combinadas más adelante utilizando el análisis de Lyapunov que se ha desarrollado aqui para su estudio.

5 Conclusiones

En este artículo se propone por primera vez una forma estructurada de hallar funciones de Lyapunov fuertes para una clase de algoritmos en modos deslizantes de segundo orden: El algoritmo *Super Twisting*. El método para hallar estas funciones se obtiene por medio de la fuerte analogía que se puede encontrar entre el algoritmo MDSO *Super Twisting* y una estructura básica lineal. El algoritmo *Super Twisting* es ampliamente usado para el diseño de controladores, observadores y diferenciadores exactos, y presenta importantes propiedades de convergencia en tiempo finito y robustez ante perturbaciones fuertes. Comparado con los modos deslizantes de primer orden, que también poseen esas propiedades, las trayectorias obtenidas mediante *Super Twisting* son mas suaves, y evitan el fuerte efecto de *chattering* que se presenta en los modos deslizantes clásicos.
Se espera que disponer de funciones de Lyapunov permita profundizar mucho más en el estudio del *Super Twisting* y otros algoritmos de modos deslizantes de orden superior, de manera que sea posible entender más completamente su naturaleza y propiedades y disponer de mejores herramientas de diseño.

6 Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por DGAPA-UNAM, proyecto PAPIIT IN112207, y CONACyT, Proyecto 51244. Los autores desean agradecer a la Universidad Pontificia Bolivariana y Colciencias por el apoyo dado a Marisol Osorio para realizar estancias en la UNAM, así como a los revisores anónimos. cuyos comentarios fueron de enorme utilidad.

Referencias

1. G Bartolini, Ferrara A, E. Usai, y V. Utkin.: On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. IEEE Transactions on Automatic Control. 45, 1711–1719 (2000)
2. I. Boiko, L. Fridman, y Castellanos M.L.: Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain. IEEE Transactions on Automatic Control 49, 946–950 (2004)
3. A. Levant.: Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International Journal of Control, 58:1247–1263, (1993)
4. A. Levant.: Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. IEEE Transactions on Automatic Control, 46:1447–1451, (2001)
5. A. Levant.: Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 50:1812–1816, (2005)
6. A. Levant.: Principles of 2-sliding mode design. Automatica, 43:576–586, (2007)
7. A. Levant and L. Fridman.: Higher order sliding modes. In: Sliding Mode Control in Engineering. Marcel Dekker, pages 53–101. (2002)
8. V. Utkin.: Sliding Modes in Control and Optimization. Springer-Verlag, (1992)
9. H.H. Choi and K. Ro.: LMI-based sliding-mode observer design method. IEEE Proceedings on Control Theory Applications, 152:113–115, (2005)
10. J. Davila, L. Fridman, and A. Levant.: Second-order sliding-modes observer for mechanical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(11):1785–1789. (2005)
11. J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak.: Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. International Journal of Control. 79(10):1251–1262, (2006)
12. Ch. Tan and Ch. Edwards.: An LMI approach for designing sliding mode observers. International Journal of Control, 74:1559–1568, (2001)
13. B.L. Walcott and S.H. Żak.: State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Automatic Control, 32:166–169, (1987)
14. A. F. Filippov.: Differential Equations with Discontinuous Righthand side. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, (1988)
15. J. C. Willems.: Dissipative dynamical systems, part I: General theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45:321–351, (1972)
16. D. J. Hill and P. J. Moylan.: Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. Journal of the Franklin Institute, 309:327–357, (1980)
17. A. Baccioti and L. Rosier.: Liapunov functions and stability in control theory. Springer-Verlag, 2nd edition, (2005)
18. H. K. Khalil.: Nonlinear Systems. Prentice–Hall, Upsaddle River, New Jersey. 3rd. edition, (2002)
19. F.H. Clarke, Y. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski.: Nonsmooth analysis and control theory. Springer-Verlag, New York, (1998)
20. J. Cortés.: Discontinuous dynamical systems. a tutorial on solutions. nonsmooth analysis, and stability. IEEE Control Systems Magazine, 28(3):33–73, (2008)
21. Y. Orlov.: Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. SIAM Journal of Control and Optimization, 43(4):1253–1271, (2005)